

一个紧支撑插值正交多小波的平衡性定理*

江 力^{1,2}, 吕 勇²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 湖南工业大学理学院, 湖南 株洲 412008)

摘 要: 结合紧支撑插值正交二重多小波的构造理论和两尺度矩阵符号的分解理论, 依据平衡多小波理论, 证明了一个紧支撑插值正交二重多尺度函数的平衡性定理, 即: 紧支撑插值正交二重多尺度函数的平衡阶数等于它的逼近阶数。

关键词: 紧支撑; 多小波; 插值; 正交性; 平衡性

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 02-0014-04

多小波是指由两个或两个以上函数作为尺度函数生成的小波^[1]。已有的成果表明多小波可同时满足对称性、紧支撑性、高阶消失矩和正交性等性质, 所以在信号处理等应用方面比单小波更有优势, 但是, 基于多小波的信号处理需进行预滤波^[2-3], 而预滤波又会破坏所设计的多小波的正交性、对称性等特性, 这阻碍了多小波的应用。文献[4]提出了平衡多小波的概念, 应用平衡多小波进行信号处理时不但可以避免预滤波, 而且在处理多项式信号时能被低通滤波器特征化, 被高通滤波器取消; 文献[5]研究了用仿酉两尺度相似变换构造高阶平衡的正交多尺度函数的方法。

本文利用文献[6]中构造紧支撑插值正交二重多尺度函数和多小波的结果, 结合文献[7]中对两尺度矩阵符号的分解方法, 根据文献[8]中关于二重多尺度函数的平衡性定理 3.2, 证明了一个紧支撑插值正交二重多尺度函数的平衡性定理, 即: 紧支撑插值正交二重多尺度函数的平衡阶数等于它的逼近阶数。

1 多小波的多分辨分析

定义 1^[1] 设 $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{r-1})^T, \phi_i \in L^2(\mathbf{R}), r \in \mathbf{N}$, 令 $V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \{2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) : 0 \leq i < r, k \in \mathbf{Z}\}$, 称函数 ϕ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 r 重多分辨分析 (r -MRA), 若 $\{V_j\}$ 满足:

- 1) $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}$;
- 2) $\text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \left\{ \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right\} = L^2(\mathbf{R})$;
- 3) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;

$$4) f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, j \in \mathbf{Z};$$

5) $\{\phi_i(t-k) : 0 \leq i < r, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基。

称函数 ϕ 为 r 重两尺度函数。若 ϕ 满足

$$\langle \phi_i(t-m), \phi_j(t-n) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{m,n}, i, j, m, n \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

则称 r 重两尺度函数 ϕ 是正交的^[9]。

因为 $\phi(t) \in V_0 \subset V_1$, 所以存在两尺度矩阵序列 $\{P_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 使

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \phi(2t-k) \quad (2)$$

定义 2. 对 r 重正交尺度函数 ϕ 生成的 $MRA(V_j)$, 设 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间, 则 $W_j \perp W_k, j \neq k$, 从而 $\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = L^2(\mathbf{R})$ 。若存在函数 $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{r-1} \in L^2(\mathbf{R})$ 使得 $\{\psi_i(t-k) : 0 \leq i < r, k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 W_0 的正交基, 则 $\{\psi_i(2^j t - k) : 0 \leq i < r, j, k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交基, 称 $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{r-1})^T$ 为正交尺度函数 ϕ 对应的正交多小波。

由定义 2 知, $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$, 所以存在两尺度矩阵序列 $\{Q_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 使

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} Q_k \phi(2t-k) \quad (3)$$

与 ϕ, ψ 对应的两尺度矩阵符号分别为

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k z^k \quad (4)$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} Q_k z^k \quad (5)$$

* 收稿日期: 2007-05-08

基金项目: 湖南省教育厅资助项目 (06C260); 湖南省自然科学基金资助项目 (05JJ30122)

作者简介: 江力 (1969 年生), 男, 副教授; E-mail: jiangli9918@163.com

其中 $z = e^{-i\omega}$ 。

2 插值正交多尺度函数的逼近阶

关于多尺度函数的逼近阶有如下定理

定理 1^[10] 设 $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{r-1})^T \in (L^2(\mathbf{R}))^r$ 是 (2) 的稳定的紧支撑解, 则 ϕ 的逼近阶是 m ($m \in \mathbf{N}$) 当且仅当存在向量 $y^k \in C^{1 \times r}, k = 0, \dots, m-1$, 且 $y^0 \neq 0$, 对于 $n = 0, \dots, m-1$, 有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k (2i)^{k-n} D^{n-k} P(e^{-i\omega})(0) = 2^{-n} y^n \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k (2i)^{k-n} D^{n-k} P(e^{-i\omega})(\pi) = 0 \quad (7)$$

其中 D 表示微分算子。

定义 3 若二重尺度函数 $\phi \in (L(\mathbf{R}))^2$ 满足

$$\phi_i(k + \frac{l}{2}) = \delta_{k,0} \delta_{i,l}, k \in \mathbf{Z}, i, l \in \{0, 1\} \quad (8)$$

则称 ϕ 具有插值性。

文献 [6] 研究了具有插值性的紧支撑二重正交尺度函数 ϕ 及其相应的紧支撑插值正交多小波 ψ 的构造 (见其中的定理 3.1 与定理 4.1), 并根据定理 1 推导出一个关于紧支撑插值正交多尺度函数 ϕ 的逼近阶定理。

定理 2^[6] 设 $\phi \in (L(\mathbf{R}))^2$ 是具有两尺度矩阵符号 $P(z)$ 的紧支撑插值正交多尺度函数, 其中

$$P(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & p_0(z) \\ z & p_1(z) \end{pmatrix}, \quad |z| = 1 \quad (9)$$

$p_0(z), p_1(z)$ 满足

$$|p_0(z)|^2 + |p_0(-z)|^2 = 2 \quad (10)$$

$$p_1(z) = z^{2p+1} \overline{p_0(-z)} p_0(-1) \quad (11)$$

$$p_0(z) = \sum_{k=M}^N p_k z^k \quad (12)$$

$p, M, N \in \mathbf{Z}, N-M$ 是奇数, 那么 ϕ 的逼近阶为 m ($m \in \mathbf{N}$) 当且仅当对于 $n=0, \dots, m-1$, 有

$$D^n p_0(e^{-i\omega})(0) = (\frac{i}{2})^n \quad (13)$$

$$D^n p_0(e^{-i\omega})(\pi) = p_0(-1) (-\frac{i}{2} - 2ip)^n \quad (14)$$

3 两尺度矩阵符号的分解

设 $r \in \mathbf{N}, y = (y_0, \dots, y_{r-1}) \in \mathbf{R}^{1 \times r}, y \neq 0$ 令 $j_0 = \min \{j: y_j \neq 0\}, j_1 = \max \{j: y_j \neq 0\}$, 若 $y_j \neq 0, 0 \leq j < r$, 则令 $d_j = \min \{k: k > j, y_k \neq 0\}$; 若 $j_0 < j_1$, 则定义 $C(z) = (c_{j,k})_{0 \leq j,k < r}$ 为

$$c_{j,k}(z) = \begin{cases} y_j^{-1} & y_j \neq 0 \text{ 且 } j = k \\ 1 & y_j = 0 \text{ 且 } j = k \\ -y_j^{-1} & y_j \neq 0 \text{ 且 } d_j = k \\ -z/y_{j_1} & j = j_1 \text{ 且 } k = j_0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (15)$$

若 $j_0 = j_1$, 则定义 $C(z)$ 为对角阵

$$C(z) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{j_0}, (1-z)/y_{j_0}, \underbrace{1, \dots, 1}_{r-1-j_0}) \quad (16)$$

若多尺度函数 ϕ 的逼近阶为 m , 文献 [7] 研究了这种多尺度函数的两尺度矩阵符号 $P(z)$ 的分解方法。

定理 3^[7] 设 $m \in \mathbf{N}, P(z) \in C_{2\pi}^{m-1}(\mathbf{R}^{r \times r})$ 提供 m 阶逼近阶, 对应的 m 个向量为 $y^k \in C^{1 \times r}, k = 0, \dots, m-1$, 且 $y^0 \neq 0, C(z) \in C_{2\pi}^{m-1}(\mathbf{R}^{r \times r})$ 满足以下条件

1) $C(z)$ 在单位圆上除在 $z = 1$ 之外可逆;

2) $C(1)$ 有简单特征值 0, 与之对应的左特征向量为 y^0 , 且 $D(\det C)(1) \neq 0$, 那么,

$$\tilde{P}(z) = 2C^{-1}(z^2)P(z)C(z) \quad (17)$$

提供至少 $m-1$ 阶逼近阶, 对应的 $m-1$ 个向量由

$$\tilde{y}^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^{j-k-1} y^j D^{k+1-j} C(e^{-i\omega})(0) \quad (18)$$

$k=0, \dots, m-2$ 确定, 且 $\tilde{y}^0 \neq 0$ 。

重复应用 (17), (18) 两式 m 次, 可将 $P(z)$ 分解为

$$P(z) = \frac{1}{2^m} C_0(z^2) \dots C_{m-1}(z^2) P_{m-1}(z) C_{m-1}^{-1}(z) \dots C_0^{-1}(z) \quad (19)$$

其中 $P_{m-1}(z) \in C_{2\pi}^{m-1}(\mathbf{R}^{r \times r})$ 。

4 插值正交多尺度函数的平衡性

由两尺度矩阵序列 $\{P_k\}$ 定义带形 Toeplitz 矩阵 L :

$$L = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

定义 4^[8] 称正交多尺度函数 ϕ 是 m ($m \in \mathbf{N}$) 阶平衡的, 如果 $u_n = (\dots, (-2)^n, (-1)^n, 0^n, 1^n, 2^n, \dots)^T, n = 0, \dots, m-1$, 均能被低通合成算子 L^T 保持, 即 $L^T u_n = 2^{-n} u_n$ 。

关于二重正交多尺度函数 ϕ 的平衡性, 有

定理 4^[8] 设正交多尺度函数 $\phi \in (L^2(\mathbf{R}))^2$ 的平衡阶为 m , 则以下两个条件是等价的:

$$Bp_1: L^T u_n = 2^{-n} u_n, \quad n = 0, \dots, m-1$$

$Bp_2: \phi(x)$ 的两尺度矩阵符号 $P(z)$ 可分解为

$$P(z) = \frac{1}{2^m} T^m(z^2) P_{m-1}(z) T^{-m}(z) \quad (20)$$

$P_{m-1}z(z)$ 满足 $P_{m-1}(1)(1,1)^T = (1,1)^T$,

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

若定理 2 中 ϕ 的逼近阶为 m , 则有

引理 1 设 $\phi \in (L^2(\mathbf{R}))^2$ 是两尺度矩阵符号为 $P(z)$ 的紧支撑插值正交多尺度函数, ϕ 的逼近阶为 $m(m \in \mathbf{N})$, 则与定理 1 相对应的 m 个向量是

$$y^n = u_0 \left(\delta_{0,n}, \frac{1}{2^n} \right) \quad (22)$$

$u_0 \neq 0$ 是常数, $n=0, \dots, m-1$.

证明 根据文献 [6] 中的定理 3.1 可知, 此时 ϕ 的两尺度矩阵符号 $P(z)$ 由 (9) - (12) 式确定, 因此, 当 $n > 0$ 时,

$$D^n P(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (-i)^n D^n p_0(z) \\ (-i)^n z & (-i)^n D^n p_1(z) \end{pmatrix},$$

令 $y^n = (u_n, v_n)$, $n = 1, 2, \dots, m-1$, 代入 (6), (7) 式, 则

$$u_n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{k-n} v_k = 2^{1-n} u_n \quad (23)$$

$$u_n - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{k-n} v_k = 0 \quad (24)$$

根据 (23), (24) 两式, 用归纳法可以证明 (22) 式对 $n = 0, \dots, m-1$ 成立.

引理 2 设 $\phi \in (L^2(\mathbf{R}))^2$ 是两尺度矩阵符号为 $P(z)$ 的紧支撑插值正交多尺度函数, ϕ 的逼近阶为 $m(m \in \mathbf{N})$, 则 $P(z)$ 有形如 (19) 式的分解式, 其中 $C_l(z)$ 为

$$C_l(z) = 2 \left(\frac{1}{2u_0} \right)^{\delta_{0,l}} T(z) \quad (25)$$

$l = 0, \dots, m-1, T(z)$ 由 (21) 式确定.

证明 将 (17), (18) 两式改写为递推形式

$$\bar{P}_l(z) = 2C_{l-1}^{-1}(z^2) \bar{P}_{l-1}(z) C_{l-1}(z) \quad (26)$$

$$\tilde{y}_l^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} i^{j-n-1} \tilde{y}_{l-1}^j D^{n+1-j} C_{l-1}(e^{-i\omega})(0) \quad (27)$$

取 $\bar{P}_0(z) = P(z)$, 若 $\bar{P}_{l-1}(z)$ 提供的逼近阶为 $p(p \in \mathbf{N})$, 对应的 p 个向量为 $\tilde{y}_{l-1}^n, n = 0, \dots, p-1, \tilde{y}_{l-1}^0 \neq 0$, 根据文献 [7] 中的引理 2.5 可知 (26) 式中的 $C_{l-1}(z)$ 的一种简单取法可由 $\tilde{y}_{l-1}^0$ 按 (15) 或 (16) 式确定, 因此, 为证 (25) 式成立, 只须证明

$$\tilde{y}_l^0 = (2u_0)^{\delta_{0,l}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

对 $l=0, \dots, m-1$ 成立即可. 验证 $l=0, 1, 2$ 的

情形:

(i) $l=0$ 时, $\tilde{y}_0^n$ 为 (22) 式中的 y^n , 此时 (28) 式成立;

(ii) $l=1$ 时, 将 $\tilde{y}_0^n$ 代入 (27) 式得 $\tilde{y}_1^n = \frac{1}{n+1} \left(- \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$, 因此 $\tilde{y}_1^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, (28) 式成立;

(iii) $l=2$ 时, 将 $\tilde{y}_1^n$ 代入 (27) 式得 $\tilde{y}_2^n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 2(-1)^{n+1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$, 因此 $\tilde{y}_2^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, (28) 式成立.

当 $l > 2$ 时, 可按公式 (27) 递推证明, 略.

定理 5 设 $\phi \in (L^2(\mathbf{R}))^2$ 是两尺度矩阵符号为 $P(z)$ 的紧支撑插值正交多尺度函数, ϕ 的逼近阶为 $m(m \in \mathbf{N})$, 则 ϕ 的平衡阶也为 m .

证明 由定理 3 可知, ϕ 的两尺度矩阵符号 $P(z)$ 的分解形式如 (19) 式, 由引理 2 可知

$$C_l(z) = 2 \left(\frac{1}{2u_0} \right)^{\delta_{0,l}} T(z), l = 0, \dots, m-1, \text{ 因此 } P(z)$$

$$= \frac{1}{2^m} T^m(z^2) P_{m-1}(z) T^{-m}(z); \text{ 由 (21) 式得 } \text{Ker}(1)$$

$= \text{span} \{ (1, 1)^T \}$, 又因为 $T(1)$ 是对称的, 所以

$v = (1, 1)^T$ 是 $T(1)$ 关于简单特征值 0 的左与右特征向量; 将 (22) 式中 y^0 代入 (6) 式, 得 $(1, 1)P(1) = (1, 1)$, 即 v^T 是 $P(1)$ 的关于特征值 1 的左特征向量, 由文献 [11] 中的引理 3 可知 v 是 $P_{m-1}(1)$ 的关于特征值 1 的右特征向量, 因此, 根据定理 4 中的 Bp_2 可知 ϕ 的平衡阶为 m .

5 理论结果的验证

例 1 取 $p_0(z) = \frac{1}{32}(z^{-2} + z^2) + \frac{1}{4}(z^{-1} - z) +$

$$\frac{15}{16} + Az(z^{-1} - z)^2, A = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{32}, p_1(z) = z p_0(-z), \text{ 根据 (9) 式得}$$

$$p(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & p_0(z) \\ z & p_1(z) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{32}(z^{-2} + z^2) + \frac{1}{4}(z^{-1} - z) + \frac{15}{16} + Az(z^{-1} - z)^2 \\ z & \frac{1}{32}(z^{-1} + z^3) + \frac{1}{4}(1 - z - 2) + \frac{15}{16}z - Az(z^{-1} - z)^2 \end{pmatrix}$$

由 $P(z)$ 和 (2) 式所构造的紧支撑插值正交多尺度函数 ϕ 的支撑区间为 $[-2, 3]$ [12], 图 1 为紧支撑插值正交尺度函数 ϕ_0, ϕ_1 的图象. 由定理 2 可知 ϕ 的逼近阶为 2, 为了验证 ϕ 的平衡阶也为 2, 根据定理 4 中的 Bp_2 知仅需验证 $P(z)$ 可分解为

$$P(z) = \frac{1}{4}T^2(z^2)P_1(z)T^{-2}(z) \quad (29)$$

的形式, 且 $P_1(z)$ 满足 $P_1(1)(1,1)^T = (1,1)^T$, $T(z)$ 按 (21) 式定义。取

$$P_1(z) = 4T^{-2}(z^2)P(z)T^2(z) = 2 \begin{pmatrix} P_{1,1}(z) & P_{1,2}(z) \\ P_{2,1}(z) & P_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

其中 $P_{1,1}(z) = A(4z^{-1} - 2 - 2z^2) + \frac{1}{32}(-2z^{-1} + 12 - 2z)$, $P_{1,2}(z) = A(-2z^{-2} - z^{-1} + 1 + z + z^2) + \frac{1}{32}(z^{-2} + 11z^{-1} - 5 + z)$, $P_{2,1}(z) = A(2z^{-1} + 2z - 4z^2) + \frac{1}{32}(-2 + 12z - 2z^2)$, $P_{2,2}(z) = A(-z^{-2} - z^{-1} - 1 + z + 2z^2) + \frac{1}{32}(z^{-1} + 11 - 5z + z^2)$, 容易验证 $P_1(z)$ 满足 $P_1(1)(1,1)^T = (1,1)^T$ 。

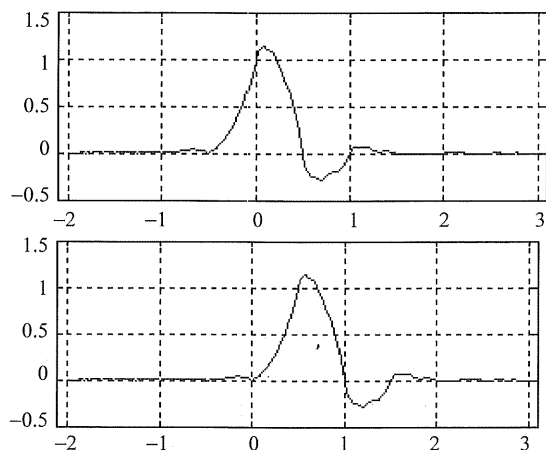


图1 紧支撑插值正交尺度函数

Fig. 1 Compactly supported interpolatory orthonormal scaling function ϕ_0, ϕ_1

参考文献:

- [1] GOODMAN T N, LEE S L. Wavelets of multiplicity r [J]. Trans Amer Math Soc, 1994, 342(1): 307-324.
- [2] XIA X G, HARDIN D P, GERONIMO J, et al. Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996, 44(1): 25-35.
- [3] XIA X G. A new prefilter design for multiwavelet transforms [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(6): 1558-1570.
- [4] LEBRUN J, VETEERLI M. Balanced multi wavelets theory and design [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(4): 1119-1124.
- [5] 杨守志, 彭立中. 基于 PTST 方法构造高阶平衡的正交多尺度函数 [J]. 中国科学: E 辑, 2006, 36(6): 644-656.
- [6] YANG S Z, PENG L Z. Construction high order balanced orthonormal multiscale functions based on PTST [J]. Science in China: Ser. E, 2006, 36(6): 644-656.
- [7] ZHOU D X. Interpolatory orthogonal multi wavelets and refinable functions [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(3): 520-527.
- [8] PLONKA G, STRELA V. Construction of multi-scaling function with approximation and symmetry [J]. SIAM J Math Anal, 1998, 29(2): 481-510.
- [9] LEBRUN J, VETEERLI M. High order balanced multi-wavelets [C]. Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Processing (ICASSP), 1998, 4: 12-15.
- [10] CHUI C K, LIAN J. A study of orthonormal multiwavelets [J]. Applied Numer Math, 1996, 20(3): 273-298.
- [11] PLONKA G. Approximation order provided by refinable function vecctors [J]. Contr Approx, 1997, 13(2): 221-244.
- [12] STRELA V. Multiwavelets: Regularity, orthogonality, and symmetry via two scale similarity transform [J]. Studies in Appl Math, 1997, 98(4): 335-354.
- [13] MASSOPUST P R, RUCH D K, VAFLEET P J. On the support properties of scaling vectors [J]. App Comput Harmon Anal, 1996, 12(3): 229-238.

A Balancing Theorem of Compactly Supported Interpolatory Orthonormal Multiwavelets

JIANG Li^{1,2}, LÜ Yong²

(1. Department of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China)

Abstract: Through the theory of constructing compactly supported interpolatory orthonormal two multiwavelets and factorizing the two scale matrix symbol, and the balancing theory of multiwavelets, a balancing theorem of compactly supported interpolatory orthonormal two multiscaling functions was proved, i. e., the balancing order of compactly supported interpolatory orthonormal two multiscaling functions is equal to its approximation order.

Key words: compactly supported; multiwavelets; interpolation; orthonormality; balancing